

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Să se arate că $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_{12} 2}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. |
| 5p | 2. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x - 9$ cu axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 3 \cdot 2^{x-4} = 76$. |
| 5p | 4. Determinați rangul termenului care nu îl conține pe x din dezvoltarea binomului $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$. |
| 5p | 5. Să se determine distanța de la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: x + y - 2 = 0$ și $d_2: 2x + y - 3 = 0$ la dreapta de ecuație $d_3: 3x - 4y - 14 = 0$. |
| 5p | 6. Determinați măsura unghiului C a triunghiului ABC , știind că $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle BAC) = 135^\circ$ |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Fie $A(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ |
| 5p | a) Să se calculeze $\det A(1)$ |
| 5p | b) Să se demonstreze ca $A(a) \cdot A(b) = A(a + b + ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$. |
| 5p | c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că $A^2(a) = A^4(1)$ |
| 5p | 2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = axy + x + y$, unde a este un număr real pozitiv. |
| 5p | a) Arătați că legea de compoziție admite element neutru oricare ar fi $a > 0$. |
| 5p | b) Arătați că $G = \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația " $\circ$ ". |
| 5p | c) Pentru $a = 3$ determinați valorile reale ale lui x pentru care $x \circ x \circ x = 21$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că, pentru orice număr real $m > 0$, ecuația $f(x) = m$ are soluție unică în $\mathbb{R}$. |

2. Se consideră funcțiile $f, F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{2x}$ și F o primitivă a funcției f .

5p a) Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(0, \infty)$.

5p b) Calculați $\int \ln x \cdot f(x) dx$, $x \in (0, \infty)$.

5p c) Determinați primitiva $G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot F''(x)$, pentru care $G(1) = 2$