

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică – informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați conjugatul numărului complex $z = (1+i)^8 - i$.
- 5p 2. Să se determine $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pentru care $(a-1)x^2 - (a-1)x + a + 3 \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+5} = \sqrt[3]{2^{2x}}$.
- 5p 4. Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $M = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$. Calculați probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea M , aceasta să fie injectivă.
- 5p 5. Fie $ABCD$ paralelogram și punctele E și F astfel încât $\overline{AE} = \overline{ED}$ și $\overline{BF} = 2\overline{FE}$. Să se demonstreze că A, F, C sunt coliniare.
- 5p 6. Triunghiul $\triangle ABC$ are $AB=5, AC=12, BC=13$. Arătați că $R = \frac{13}{4}r$, unde R este raza cercului circumscris și r este raza cercului înscris în triunghiul ABC .

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2ay + z = -1 \\ 2ax + y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$
, unde a este un număr real.
- 5p a) Rezolvați sistemul pentru $a=0$.
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p c) Pentru $a=-1$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$.
2. Pe mulțimea $G = (0,1)$ considerăm legea de compoziție “*”, definită prin
$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$$
, oricare ar fi $x, y \in G$.
- 5p a) Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție.
- 5p b) Arătați că $x * y \in G$ oricare ar fi $x, y \in G$.
- 5p c) Știind că legea de compoziție “*” determină o structură algebrică de grup pe mulțimea G , determinați numerele reale a, b pentru care funcția $f: G \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \frac{a}{x} - b$ este izomorfism de grupuri între $(G, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x+1}$.

-
- | | |
|-----------|---|
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2}}$, $x \in (-1, +\infty)$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{5x}$. |
| 5p | c) Arătați că $\sqrt{3(e^{2x}+2)} \geq (e^x+1)\sqrt{2}$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$. |
| | 2. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$. |
| 5p | a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. |
| 5p | b) Calculați $\int f(x) dx$. |
| 5p | c) Determinați o primitivă a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \sin x$ pentru care $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \sqrt{\frac{2}{e}}$ |