Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2\cdot 3 =$ $= 8$	**3p** **2p**
2.	$2x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x = -2$ sau $x = 2$	**3p** **2p**
3.	$3^{2x}\left(3^2 - 1\right) = 8 \Leftrightarrow 3^{2x} = 1$ $x = 0$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Divizorii din mulțimea A ai numărului 100 sunt $1, 2, 4$ şi 5, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{4}{9}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram și pentru $\{O\} = AC \cap BD$, obținem $\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}\right)$ $\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}\right)$, deci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$	**3p** **2p**
6.	$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x + \cos x\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin x \sin\dfrac{\pi}{4} =$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12\cdot 3 - 0\cdot 1 =$ $= 36 - 0 = 36$	**3p** **2p**
b)	$A(a) - (12 + a)I_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 + a & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(a) - (12 + a)I_2\right) = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 + a & -9 \end{vmatrix} = -a(1 + a)$ $a(1 + a) = 0$, de unde obţinem $a = 0$ sau $a = -1$	**3p** **2p**
c)	$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deci $X \cdot X = A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Din $b(a + d) = 0$ şi $c(a + d) = 1$, rezultă $a + d \neq 0$ şi $b = 0$ şi, cum $d^2 + bc = 3$, obţinem $d^2 = 3$, deci d este număr iraţional	**2p** **3p**
2.a)	$1 \circ 1 = 1 + \sqrt[3]{1} - 2 =$ $= 1 + 1 - 2 = 0$	**3p** **2p**
b)	$x + \sqrt[3]{a} - 2 = x$, pentru orice număr real x $\sqrt[3]{a} = 2 \Leftrightarrow a = 8$	**2p** **3p**

c)	$x+\sqrt[3]{x^6}-2=4$, deci $x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2\right)'-\left(2\sqrt{x^2-1}\right)'=2x-2\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=$	**3p**
	$=2x-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=2x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=$	**3p**
	$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=2$	**2p**
c)	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2=2\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^4=4\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2=0\Leftrightarrow x^2=2$ şi, cum $x>1$, obţinem $x=\sqrt{2}$	**2p**
	$A\left(\sqrt{2},0\right)$ este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox și, cum panta tangentei la graficul funcției f în punctul A este $f'\left(\sqrt{2}\right)=0$, obținem că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)\dfrac{x}{x^2+2x+2}dx=\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\left.\dfrac{x^2}{2}\right\|_0^1=\dfrac{1}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^2\left(f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\int_0^2\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)'}{x^2+2x+2}dx=$	**2p**
	$=\left.\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)\right\|_0^2=\dfrac{1}{2}\ln 5$	**3p**
c)	$\int_1^e\left(\dfrac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\int_1^e\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx+2\int_1^e\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\int_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx+2\int_1^e(\ln x)'\ln x\,dx=$	**3p**
	$=\left.\dfrac{x^2}{2}\ln x\right\|_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx+2\cdot\left.\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right\|_1^e=\dfrac{e^2}{2}-\left.\dfrac{x^2}{4}\right\|_1^e+\ln^2 e-\ln^2 1=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{e^2+5}{4}$	**2p**