Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2019^x+2019^{-x}=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ și $B(2,-2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe AB.

5p **6.** Arătați că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m și n.

5p **b)** Determinați numerele reale m și n, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Demonstrați că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1} x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.