EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2024
Proba E.c)
Matematică M_mate-info
Aprilie 2024

SIMULARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $z=1+i\sqrt{2}$, unde $i^2=-1$. Aflați valoarea numărului real a pentru care $\frac{z}{a+i}\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

5p **4.** Determinați termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$ care **nu** îl conține pe x.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Dacă $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{v}\right|=2$ și măsura unghiului dintre vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este $\frac{\pi}{6}$, calculați $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)$.

5p **6.** Știind că în triunghiul ABC are loc relația $\sin C=2\sin A\cos B$, arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a-1 & 3 & 1 \\ a & a-3 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $M(3)\cdot M(0)$.

5p **b)** Determinați valorile lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Se dau punctele $A\left(n^2,\ 1\right)$, $B\left(2n^2-1,\ 3\right)$, $C\left(n^2,\ n^2-3\right)$. Dacă n este număr întreg, cu modulul diferit de 1 și 2, arătați că aria suprafeței triunghiului ABC este un număr natural par.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-3X+m$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Dacă $m=18$, arătați că -3 este singura rădăcină întreagă a polinomului f.

5p **b)** Calculați $S=x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

5p **c)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile întregi.

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

	1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se definește funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx - 1$.
5p	**a)** Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, funcția f_n este convexă.
5p	**b)** Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.
5p	**c)** Dacă x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, demonstrați că $x_n < \sqrt[n]{1+n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
	2. Fie funcțiile $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
5p	**a)** Arătați că funcția F este strict crescătoare.
5p	**b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) F(x) dx$.
5p	**c)** Arătați că există un singur număr real x, pentru care $\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{2}$.