EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2024
Proba E.c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Aprilie 2024

SIMULARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{z}{a+i}=\frac{(1+i\sqrt{2})(a-i)}{a^2+1}=\frac{a+\sqrt{2}}{a^2+1}+i\frac{a\sqrt{2}-1}{a^2+1}$.	3p
	$\frac{z}{a+i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a\sqrt{2}-1=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.	2p
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+3x+2=0$;	2p
	$x_1=-1\Rightarrow y_1=-1$ și $x_2=-2\Rightarrow y_2=0$.	3p
3.	$1+7x=1+3x+3x^2+x^3\Rightarrow x(x^2+3x-4)=0$;	2p
	$x_1=0, x_2=1, x_3=-4$.	3p
4.	$T_{k+1}=C_{200}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{200-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{200}^k 2^k x^{\frac{200-k}{3}-\frac{k}{2}},\quad k\in\{0,1,2,...,200\}$;	3p
	$\frac{200-k}{3}-\frac{k}{2}=0\Rightarrow k=80\Rightarrow T_{81}=C_{200}^{80}2^{80}$	2p
5.	$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{v}-\vec{u})=3\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=3\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert\cos\frac{\pi}{6}-2\lvert\vec{u}\rvert^2+2\lvert\vec{v}\rvert^2$;	3p
	$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{v}-\vec{u})=11$.	2p
6.	$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow\sin A=\frac{a}{2R};\sin C=\frac{c}{2R}$; iar $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.	3p
	$b^2=a^2\Rightarrow a=b\Rightarrow\Delta ABC$ este isoscel.	2p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$M(3)\cdot M(0)=\begin{pmatrix}3&1&1\\5&3&1\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&3&1\\0&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1+0&3+3-3&3+1+1\\0-3+0&5+9-3&5+3+1\\0+0+0&3+0-3&3+0+1\end{pmatrix}=$	3p
	$=\begin{pmatrix}-1&3&5\\-3&11&9\\0&0&4\end{pmatrix}$.	2p

b)	$\det\left(M(a)\right)=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a-1 & 3 & 1 \\ a & a-3 & 1 \end{vmatrix}=3a+(2a-1)(a-3)+a-3a-a(a-3)-(2a-1)=$ $=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$. $M(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow (a-1)(a-4)\neq 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}-\{1,\ 4\}$.	3p 2p
c)	$A_{ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\det\left(M\left(n^2\right)\right)\overset{b)}{=}\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$. $A_{ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=\frac{1}{2}\lvert(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\rvert=\frac{1}{2}\left\lvert\underbrace{(n-2)(n-1)}_{2k,k\in\mathbb{Z}}\underbrace{(n+1)(n+2)}_{2t,t\in\mathbb{Z}}\right\rvert=\frac{1}{2}\lvert 4kt\rvert=2\lvert kt\rvert$, care este număr natural par.	2p 3p
2.a)	Pentru $m=18$ polinomul devine $f=X^3-3X+18$. $f(-3)=-27+9+18=0$, deci -3 este rădăcină a polinomului f. $f=(X+3)\left(X^2-3X+6\right)$, $f(x)=0\Rightarrow x_1=-3\in\mathbb{Z}, x_{2,3}=\frac{3\pm i\sqrt{15}}{2}\notin\mathbb{Z}.$	2p 3p
b)	x_1 rădăcină a polinomului f, rezultă $x_1^3-3x_1+m=0\,\vert\cdot x_1\Rightarrow x_1^4-3x_1^2+mx_1=0$. Analog pentru x_2 și x_3. Prin adunarea relațiilor obținute avem $x_1^4+x_2^4+x_3^4-3\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+m\left(x_1+x_2+x_3\right)=0,\ x_1^4+x_2^4+x_3^4-3\left(S_1^2-2S_2\right)+mS_1=0.$ Din relațiile lui Viète $S_1=0, S_2=-3$, rezultă $x_1^4+x_2^4+x_3^4=18$.	3p 2p
c)	Dacă $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}$, cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=S_1^2-2S_2=6,$ rezultă că doi termeni ai sumei sunt 1 și un termen este 4. Deci $x_1,x_2\in\{-1,\ 1\}$, $x_3\in\{2,\ -2\}$. $f(1)=0\Leftrightarrow 1-3+m=0\Leftrightarrow m=2\Rightarrow f=X^3-3X+2=(X-1)\left(X^2+X-2\right)$ care are rădăcinile întregi $x_1=1, x_2=1, x_3=-2$. $f(-1)=0\Leftrightarrow -1+3+m=0\Leftrightarrow m=-2\Rightarrow f=X^3-3X-2=(X+1)\left(X^2-X-2\right)$ care are rădăcinile întregi $x_1=-1, x_2=-1, x_3=2$.	3p 2p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f_n{}'(x)=nx^{n-1}-n$; $f_n{}''(x)=n(n-1)x^{n-2}\geq 0,\quad \forall x\geq 0$, așadar f este funcție convexă.	2p 3p
b)	Șirul Rolle atașat ecuației $x^n-nx-1=0$, $x\geq 0$, este: $\begin{array}{c\|ccc} x & [0 & 1 & \infty \\ \hline f_n(x) & - & - & + \end{array}$ Ecuația are o singură soluție $x_n\in(1,\infty)$.	3p 2p
c)	$f_n(1)<0$ și $f_n(n)=n^n-n^2-1>0$, pentru $n\geq 3$, deci $1<x_n<n$.	3p

	Din $x_n=\sqrt[n]{1+nx_n}$ se obține $x_n<\sqrt[n]{1+n^2}$.	2p
2.a)	$F'(x)=e^{\sin^2 x}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.	3p 2p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)F(x)dx=\frac{1}{2}\sin(2x)F(x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)F'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)e^{\sin^2 x}dx$ $=-\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1-e}{2}$.	3p 2p
c)	Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{x}{2}$ este derivabilă și $g'(x)=e^{\sin^2 x}-\frac{1}{2}$. $g'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $g(0)=0$ există un unic număr real x, și anume $x=0$, pentru care $\int_0^x f(t)dt=\frac{x}{2}$.	2p 3p