

## Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Model februarie 2024

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*  
*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

## SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1) Se consideră numărul complex  $z = 1 - i$ . Arătați că  $z^3 = z^2 - 2$ .
- 5p 2) Se consideră ecuația  $x^2 + ax + 3 = 0$ , unde  $a$  este un număr real. Dacă  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației, determinați numărul real  $a$  pentru care  $x_1, 2, x_2$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2\left(\frac{x}{2}\right) + \log_x 2 = 1$ .
- 5p 4) Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 11\}$ , acesta să fie mai mic decât  $\sqrt[3]{2024}$ .
- 5p 5) În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(a, b), B(0, -5), C(4, -3)$  pentru oricare numere reale  $a$  și  $b$ . Determinați coordonatele punctului  $D$  știind că  $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AD}$ .
- 5p 6) Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 7, AC = 5$  și  $B = \frac{\pi}{4}$ . Calculați  $\sin A$ .

## SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- 1) Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ 2 & a & -1 \\ a+1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  și sistemul de ecuații liniare
- $$\begin{cases} x - y + (a-1)z = 2 \\ 2x + ay - z = 3 \\ (a+1)x - 2y + 2z = 5 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$
- 5p a) Arătați că pentru orice  $a \in (-\infty, 0]$  rangul matricei  $A(a)$  este 3.
- 5p b) Determinați numerele reale  $a$  pentru care  $\det(A(a) \cdot A(2)) \geq 20$ .
- 5p c) Determinați numerele întregi  $a$  pentru care sistemul de ecuații are soluția unică  $(1, y_0, z_0)$  cu  $y_0, z_0$  numere întregi.
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = 3^x + 3^y - 3^{x+y+1}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 \circ (-1) = (-1) \circ (-1)$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ x \geq -1$ .
- 5p c) Determinați ultima cifră a numărului  $N = \log_3 \frac{4}{3} \circ \log_3 \frac{7}{3} \circ \dots \circ \log_3 \frac{19}{3} - \frac{1}{3}$ .

## SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

- 1) Se consideră funcția  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - \ln(\ln x)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x \ln x}, x \in (1, +\infty)$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x) f'(e^{x+1})$ .
- 5p c) Arătați că  $\ln \frac{x}{x+1} \leq \ln \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ , pentru orice  $x \in [e, +\infty)$ .
- 2) Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ . Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^2 x f^2(x) dx = 14$ .
- 5p b) Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .
- 5p c) Arătați că  $(n+2)I_n + 5(n-1)I_{n-2} = 6\sqrt{6}$ , pentru orice număr natural  $n, n \geq 3$ .