BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare județeană

Proba E. c) Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	Avem $\|z\| = \sqrt{5^2+7^2} = \sqrt{74}$.	**3p**
	Deoarece $8 < \sqrt{74} < 9$ obţinem $\left[\|z\|\right] = 8$.	**2p**
2.	Soluţiile ecuaţiei $6x^2 - 7x - 20 = 0$ sunt $x_1 = -\frac{4}{3}$ şi $x_2 = \frac{5}{2}$.	**2p**
	Din $6x^2 - 7x - 20 \le 0$ obţinem $-\frac{4}{3} \le x \le \frac{5}{2}$.	**1p**
	În concluzie $A = \{-1, 0, 1, 2\}$.	**2p**
3.	Prin ridicare la pătrat şi calcule ulterioare obţinem $\sqrt{(x-1)(3-x)} = 1$.	**1p**
	Suntem conduşi la ecuaţia $x^2 - 4x + 4 = 0$ cu soluţiile $x_1 = x_2 = 2$.	**2p**
	Prin verificare $(x-1 \ge 0, 3-x \ge 0)$ în ecuația inițială deducem că soluţia ecuaţiei este $S = \{2\}$.	**2p**
4.	Numărul de cazuri posibile este egal cu $2^6 = 64$.	**1p**
	Numărul de cazuri favorabile este egal cu $C_6^4 = 15$.	**2p**
	Probabilitatea cerută este egală cu $P(A) = \frac{Nr.\ cazuri\ favorabile}{Nr.\ cazuri\ posibile} = \frac{15}{64}$.	**2p**
5.	Din $BD = \frac{1}{3}BC$ obţinem $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, din $CE = \frac{1}{2}AE$ deducem că $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, iar $BF = \frac{2}{3}AB$ conduce la $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.	**2p**
	În continuare avem $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}\right) + \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}\right) =$	**2p**
	$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$.	**1p**

6.	Din $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ şi $\cos x<0$ pentru $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ deducem $\cos x=-\frac{3}{5}$. Atunci $\sin 2x=2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. a)	Avem $I_3+A+A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Atunci $\det\left(I_3+A+A^2\right)=0$.	**4p** **1p**
1. b)	$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ De unde se obţine $n=3$.	**4p** **1p**
1. c)	Punctul anterior ne arată că puterile matricei A se repetă, $A^{3k}=I_3$ şi atunci suma din enunţ este egală cu $34A+33A^2+33I_3$. Suma cerută este $33\cdot6+34\cdot3=300$.	**3p** **2p**
2. a)	$\left(\frac{31}{2}-t\right)\oplus\left(\frac{31}{2}+t\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{31}{2}-t\right)+2\cdot\left(\frac{31}{2}+t\right)-31}{2}$ Rezultat $\left(\frac{31}{2}-t\right)\oplus\left(\frac{31}{2}+t\right)=\frac{31}{2}$	**2p** **3p**
2. b)	$\exists e\in\mathbb{R}$ a.î. $\forall x\in\mathbb{R}\ x\oplus e=e\oplus x=x$ Legea este comutativă şi din $x\oplus e=x$ deducem $\frac{2x+2e-31}{2}=x$. De unde obținem $e=\frac{31}{2}\in\mathbb{R}$.	**2p** **2p** **1p**
2. c)	Obţinem $a_{15}=a_1+(15-1)r=\frac{31}{2}=\frac{a_{15-k}+a_{15+k}}{2}$. Pentru orice $k\in\{1,2,3,\ldots,14\}$ avem $a_{15-k}\oplus a_{15+k}=\left(a_{15}-k\right)\oplus\left(a_{15}+k\right)=\frac{31}{2}$. Legea fiind asociativă şi comutativă avem $a_1\oplus a_2\oplus\ldots\oplus a_{29}$ $\left(a_1\oplus a_{29}\right)\oplus\left(a_2\oplus a_{28}\right)\oplus\ldots\oplus\left(a_{14}\oplus a_{16}\right)\oplus a_{15}=\frac{31}{2}$.	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. a)	Prin calcul obţinem $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$. Deoarece $x>0$ atunci ecuaţia $f'(x)=0$ are doar soluţia $x=1$.	**3p** **2p**
1. b)	Pentru $x\in(0,1)$ avem $f'(x)<0$, respectiv pentru $x\in(1,\infty)$ $f'(x)>0$. Din tabelul de semn al funcției f'deducem că f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ şi strict crescătoare pe$(1,\infty)$.	**3p** **2p**
1. c)	Observăm că $x=1$ este soluție. Dacă $x>1$ atunci $x^2<x^3$ şi monotonia conduce la $f\left(x^2\right)<f\left(x^3\right)$. Analog obţinem $f\left(x^4\right)<f\left(x^5\right)$ care însumată cu precedenta relaţie conduce la concluzia că nu avem soluţii $x>1$. Dacă $x<1$ atunci $x^2>x^3$ şi monotonia conduce la $f\left(x^2\right)<f\left(x^3\right)$. Analog obţinem $f\left(x^4\right)<f\left(x^5\right)$ care însumată cu precedenta relaţie conduce la concluzia că nu avem soluţii $x<1$. Concluzia x=1 este soluție unică.	**1p** **2p** **2p**
2. a)	Facem schimbarea de variabilă $x^2=t$. Domeniul de integrare devine, pentru $x=0, t=0$, respectiv $x=1, t=1$ obținem $I_1=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt=\frac{1}{2}e^t\Big\|_0^1=\frac{e-1}{2}$.	**2p** **3p**
2. b)	Avem $2\cdot I_{2024}=\int_0^1 x^{2023}\cdot\left(2xe^{x^2}\right)dx=x^{2023}e^{x^2}\Big\|_0^1-\int_0^1 2023\,x^{2022}e^{x^2}dx=$ $=e-2023I_{2022}$ şi apoi concluzia $2I_{2024}+2023I_{2022}=e$.	**3p** **2p**
2. c)	Relația din enunț conduce la $t^2+1\geq 2t$. Atunci $I_2+I_0=\int_0^1\left(x^2+1\right)e^{x^2}dx\geq\int_0^1 2xe^{x^2}dx=2I_1=e-1$.	**1p** **4p**