

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR  
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

iulie 2024

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Model

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + mx - 2$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p a) Arătați că ecuația  $f(x) = 0$  are două soluții reale distincte, pentru orice număr real  $m$ .
- 5p b) Pentru  $m = 2$ , parabola asociată funcției  $f$  are vârful  $V$  și intersectează axa  $Ox$  în punctele  $A$  și  $B$ . Arătați că triunghiul  $VAB$  este echilateral.
- 5p c) Arătați că, pentru orice număr real  $m$ , mulțimea  $f^{-1}(\{x_1, x_2\})$  are 4 elemente, unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $f(x) = 0$  și  $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ .
2. Se consideră triunghiul  $ABC$ , cu  $AB < BC$ , punctele  $D$  și  $E$  sunt mijloacele segmentelor  $AB$ , respectiv  $AC$ , iar  $M$  este un punct situat pe segmentul  $DE$ , diferit de punctele  $D$  și  $E$ . Punctele  $N$  și  $P$  sunt simetricile lui  $M$  față de punctele  $D$  și respectiv  $E$ , iar  $Q$  este punctul de intersecție a dreptelor  $BM$  și  $CP$  și  $T$  este punctul de intersecție a dreptelor  $CM$  și  $BN$ .
- 5p a) Arătați că dreptele  $BN$  și  $CP$  sunt paralele.
- 5p b) Demonstrați că  $AM^2 = PQ \cdot NT$ .
- 5p c) Arătați că, dacă semidreapta  $BM$  este bisectoarea unghiului  $ABC$ , atunci  $2EQ = BC - AB$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + |xy| - |x| - |y| + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $e = 1$  este elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p b) Arătați că  $x * y \in [0, 1]$ , pentru orice  $x, y \in [0, 1]$ .
- 5p c) Se consideră mulțimea  $A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a * x = a, \text{ pentru orice } x \in [b, +\infty)\}$ . Determinați valoarea minimă a lui  $a + b$ , unde  $(a, b) \in A$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $f$  este concavă.
- 5p b) Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n - \left( f'\left(\frac{1}{n^2}\right) + f'\left(\frac{2}{n^2}\right) + f'\left(\frac{3}{n^2}\right) + \dots + f'\left(\frac{n}{n^2}\right) \right) \right) = 2$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{x - f(x)}{x^3} dx = \frac{9}{8} + \ln 2$ .

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

**Competențe specifice și exemple de activități de învățare**

Clasa a VIII-a
<p><b>1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Identificarea, construcția, notarea și citirea unor drepte concurente/paralele/necoplanare în configurații spațiale, cu exemplificare și în realitatea înconjurătoare</li><li>- Identificarea, în configurații spațiale simple și în realitate, a pozițiilor relative ale unei drepte față de un plan</li><li>- Identificarea pozițiilor relative a două plane în configurații spațiale simple și în realitatea înconjurătoare</li><li>- Recunoașterea figurilor geometrice obținute în urma secționării unei piramide sau a unei prisme cu un plan paralel cu baza</li></ul>
<p><b>2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Reprezentarea prin desen sau prin modele a unor configurații spațiale în/din contexte reale</li><li>- Utilizarea instrumentelor geometrice și a softurilor matematice pentru a desena diferite configurații spațiale</li><li>- Utilizarea diferitelor mijloace didactice pentru a modela rezultate asociate relațiilor de paralelism și perpendicularitate în spațiu</li><li>- Utilizarea convențiilor de notare și citire a configurațiilor spațiale</li><li>- Reprezentarea, prin desen, a proiecțiilor și a unghiurilor</li><li>- Clasificarea prismelor/piramidelor după forma bazei</li><li>- Construirea înălțimii unei prisme sau a unei piramide</li></ul>
<p><b>3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Utilizarea măsurilor unghiurilor și a distanțelor pentru stabilirea pozițiilor relative între drepte și/sau plane</li><li>- Determinarea paralelismului în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple</li><li>- Determinarea perpendicularității în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple</li></ul>
<p><b>4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Construirea unor configurații geometrice cu drepte și plane aflate în relații de paralelism sau perpendicularitate</li><li>- Verificarea validității unor afirmații legate de pozițiile relative ale dreptelor și/sau ale planelor prin exemple și contraexemplu</li><li>- Identificarea și utilizarea axiomelor, teoremelor directe/reciproce pentru rezolvarea de probleme în configurații spațiale simple</li><li>- Evidențierea unor aspecte particulare sau a unor aspecte ce pot fi generalizate, referitoare la configurații spațiale</li></ul>
<p><b>5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie în spațiu</li><li>- Adecvarea reprezentărilor configurațiilor spațiale la cerințele problemelor, în vederea optimizării rezolvării problemei</li><li>- Optimizarea rezolvării de probleme prin utilizarea instrumentelor interactive de realizare a reprezentărilor geometrice (softuri matematice)</li><li>- Analizarea/interpretarea unor situații din realitatea înconjurătoare și transpunerea lor în probleme de geometrie în spațiu</li></ul>

#### 6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale

- Formularea de ipoteze și de concluzii în probleme cu conținut practic legate de proiecții pe plan a unor puncte, drepte, segmente
- Verificarea validității unor rezultate, în cazul înlocuirii unor părți din ipoteză cu părți din concluzie
- Transpunerea unor situații date în limbajul specific geometriei, interpretarea rezultatelor obținute și corelarea răspunsului geometric cu restricțiile impuse de realitatea înconjurătoare

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Geometrie	<b>4. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane</li><li>• Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; prismă dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări</li><li>• Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu un plan, plane paralele, aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)</li><li>• Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan, aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept, distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept; plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate</li><li>• Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment; unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare</li><li>• Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele</li></ul>

**Notă:** Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „**Elemente ale geometriei în spațiu. Perpendicularitate**”, care să cuprindă cinci itemi: *un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată;
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat;
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item;
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item;
- respectați formatul tipului de item;
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat.