

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
iulie 2024

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $x^2 + mx - 2 = 0$, $\Delta = m^2 + 8$ $\Delta > 0$, pentru orice număr real m , deci ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte	2p 3p
	b) $A(-1 - \sqrt{3}, 0)$, $B(-1 + \sqrt{3}, 0)$, deci $AB = 2\sqrt{3}$ Cum $V(-1, -3)$, obținem $VA = VB = 2\sqrt{3}$, deci triunghiul VAB este echilateral	2p 3p
	c) $f(x) = x_i$, cu $\Delta_i = \Delta + 4x_i$, $i = \overline{1, 2}$; $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = -2$, pentru orice număr real m $\Delta_1 + \Delta_2 = 2(m-1)^2 + 14 > 0$, $\Delta_1 \Delta_2 = m^2(m-2)^2 + 4(3m^2 - 8m + 8) > 0$, de unde obținem $\Delta_1 > 0$ și $\Delta_2 > 0$, deci ecuațiile $f(x) = x_i$, $i = \overline{1, 2}$, au câte două soluții reale distincte și, cum $x_1 \neq x_2$, obținem că mulțimea $f^{-1}(\{x_1, x_2\})$ are 4 elemente, pentru orice număr real m	2p 3p
2.	a) Segmentele AB și MN au același mijloc, de unde obținem că patrulaterul $ANBM$ este paralelogram, deci $BN \parallel AM$ Segmentele AC și MP au același mijloc, de unde obținem că patrulaterul $AMCP$ este paralelogram, deci $CP \parallel AM$, de unde obținem $BN \parallel CP$	2p 3p
	b) $\Delta MTN \sim \Delta MCP$, de unde obținem $\frac{TN}{CP} = \frac{MN}{MP}$ $\Delta MBN \sim \Delta MQP$, de unde obținem $\frac{BN}{QP} = \frac{MN}{MP}$, deci $\frac{TN}{CP} = \frac{BN}{QP}$ și, cum $BN = CP = AM$, obținem $AM^2 = PQ \cdot NT$	2p 3p
	c) $\sphericalangle CBM = \sphericalangle MBD$ și $DE \parallel BC$, deci $BD = MD$, de unde obținem că $ANBM$ este dreptunghi și, cum QE este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic MPQ , obținem $EQ = \frac{MP}{2}$ $EQ = \frac{NP - NM}{2}$ și, cum $BCPN$ este paralelogram și $NM = AB$, obținem $EQ = \frac{BC - AB}{2}$, adică $2EQ = BC - AB$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $x * 1 = x + x - x - 1 + 1 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$1 * x = x + x - 1 - x + 1 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p

	<p>b) $x, y \in [0,1] \Rightarrow \left x - \frac{1}{2}\right \leq \frac{1}{2}$ și $\left y - \frac{1}{2}\right \leq \frac{1}{2}$, de unde obținem $\left \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\right \leq \frac{1}{4}$, pentru orice $x, y \in [0,1]$</p> <p>$0 \leq 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \leq 1$, de unde obținem $0 \leq 2xy - x - y + 1 \leq 1$, deci $x * y \in [0,1]$, pentru orice $x, y \in [0,1]$</p>	3p
	<p>c) Pentru $(a, b) \in A$, există $x_0 \in [b, +\infty)$ cu $x_0 > 1$ și, cum $a * x_0 = a$, obținem $(x_0 - 1)(a + a - 1) = 0$, deci $a + a - 1 = 0$, de unde rezultă $a = \frac{1}{2}$</p> <p>$\frac{1}{2} * x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x - x + 1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, +\infty)$, deci, pentru $(a, b) \in A$, valoarea minimă a lui b este</p> <p>0, de unde obținem că valoarea minimă a lui $a + b$ este egală cu $\frac{1}{2}$</p>	2p 3p
2.	<p>a) $f'(x) = 1 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$</p> <p>$f''(x) = -\frac{4}{(4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}} < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem că funcția f este concavă</p>	2p 3p
	<p>b) $n - \left(f'\left(\frac{1}{n^2}\right) + f'\left(\frac{2}{n^2}\right) + f'\left(\frac{3}{n^2}\right) + \dots + f'\left(\frac{n}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \frac{4k}{\sqrt{4k^2 + n^4}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și</p> <p>$\frac{2n(n+1)}{\sqrt{4n^2 + n^4}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{4k}{\sqrt{4k^2 + n^4}} \leq \frac{2n(n+1)}{\sqrt{4 + n^4}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n(n+1)}{\sqrt{4n^2 + n^4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n(n+1)}{\sqrt{4 + n^4}} = 2$, de unde obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{4k}{\sqrt{4k^2 + n^4}}\right) = 2$</p>	3p 2p
	<p>c) $\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{x - f(x)}{x^3} dx = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' \sqrt{4x^2 + 1} dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \sqrt{4x^2 + 1} \Big _{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{2}{x\sqrt{4x^2 + 1}} dx =$</p> <p>$= -\frac{3}{4} + \frac{15}{8} - 2 \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} dx = \frac{9}{8} - 2 \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right) \Big _{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{9}{8} + \ln 2$</p>	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	1p 1p 1p 1p 1p 1p
---	----------------------------------

<i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p