

**EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
19 iulie 2023**

**Probă scrisă
MATEMATICĂ**

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit în barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $2S_{25} = 25(a_1 + a_{25}) =$ $= 25(a_5 - 4r + a_{21} + 4r) = 25(a_5 + a_{21})$, unde r este rația progresiei aritmetice	3p
	b) $a_3 = a_1 + 2r$, $a_{10} = a_1 + 9r$ și, cum $a_3^2 = a_1 a_{10}$, obținem $(a_1 + 2r)^2 = a_1(a_1 + 9r)$ $4r^2 = 5a_1 r$ și, cum $r \neq 0$, obținem $4r = 5a_1$	3p
	Cum $a_1 + a_3 + a_{10} = 134$, obținem $a_1 = 8$, $a_3 = 28$ și $a_{10} = 98$	2p 3p
2.	a) $\triangle AMC \equiv \triangle DMB \Rightarrow AC = DB$, deci $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DAM = \sphericalangle CBM$ Triunghiurile AMD și BMC sunt isoscele cu vârful în M , deci $\triangle AMD \equiv \triangle BMC$, de unde obținem $MA = MB$	4p 3p
	b) $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow OA = OB$ și, cum M este mijlocul lui AB , obținem $OM \perp AB$; $\triangle ANB$ isoscel, punctul M este mijlocul lui $AB \Rightarrow NM \perp AB$, deci punctele N , O și M sunt coliniare $MA = MC = MB \Rightarrow MC = \frac{AB}{2}$, deci triunghiul ACB este dreptunghic în C	3p 2p
	$\triangle NCO \sim \triangle NMB \Rightarrow \frac{CN}{MN} = \frac{OC}{BM}$ și, cum $OC = OD$ și $BM = MD$, obținem $\frac{CN}{MN} = \frac{OD}{MD}$	3p
3.	a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = a$, $x_1 x_2 x_3 = -b$ $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = \frac{3+2(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{1+(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3} = \frac{5+a}{2+a-b}$ și, cum $\frac{5+a}{2+a-b} = 1$, obținem $b = -3$	3p 4p
	b) $a+b = f(1) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ Cum x_1 , x_2 și x_3 sunt numere reale mai mari sau egale cu zero și $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, rezultă $1-x_1 \geq 0$, $1-x_2 \geq 0$ și $1-x_3 \geq 0$	2p 2p
	$\sqrt[3]{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)} \leq \frac{(1-x_1)+(1-x_2)+(1-x_3)}{3} = \frac{2}{3}$, deci $a+b \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	4p
4.	a) $g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x+1) - x$, $g'(x) = \frac{-x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$; pentru $x \in (-1, 0]$, $g'(x) \geq 0$, deci funcția g este crescătoare pe $(-1, 0]$; pentru $x \in [0, +\infty)$, $g'(x) \leq 0$, deci funcția g este descrescătoare pe $[0, +\infty)$ Cum $g(0) = 0$, rezultă $g(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci $f(x) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	4p 3p

<p>b) $0 < a \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{f(x^{2n})}{x^n} \geq 0$, deci $I_n \geq 0$, pentru orice număr natural n</p>	3p
<p>$f(x^{2n}) \leq x^{2n}$, pentru orice $x \in [a, 1]$, deci $I_n \leq \int_a^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _a^1 = \frac{1}{n+1}(1 - a^{n+1}) < \frac{1}{n+1}$,</p> <p>pentru orice număr natural n</p>	3p
<p>Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$</p>	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de tip completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>