

Simulare, Bacalaureat, 17 ianuarie 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $A = z(2 + 3i) + \bar{z}(2 - 3i)$ este real pentru orice număr complex z , unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Demonstrați că funcția f este impară.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x) + 1 = \lg(7-x)$.
- 5p 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care sunt strict descrescătoare.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -2)$, $B(-1, 2)$ și $C(0, 3)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $ABCD$ este paralelogram.
- 5p 6. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 5, 6 și 8. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 4 & 9 & a^2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + az = 1 \\ 4x + 9y + a^2z = a - 3 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p c) Pentru $a = 4$, rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4x + 4y - 4xy - 3$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = 1 - 4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $x * \frac{1}{x} \geq 1$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(3-x)(x+1)}{(x^2+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{6}$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

5p

a) Calculați $\int (x - f(x) + \ln x) dx$.

5p

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1, \infty)$.

5p

c) Determinați primitiva G a funcției $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$, al cărei grafic trece prin punctul

$A\left(1, \frac{5}{12}\right)$.